线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

数组向量空间上的概念以及性质推广到一般线性空间

前面关于数组空间的绝大部分结论都可以平行的推广到一般线性空间上 (只需要, 证明过程中只涉及加法和数乘).

$$
\begin{tikzcd}
\text{加法, 数乘} \arrow[r] & \text{线性组合} \arrow[r] & \text{线性相关 (无关), 等价} \arrow[d] \\
& \text{秩, 基, 维数} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \text{极大无关组} \arrow[l] \\
\text{坐标} & \text{过渡矩阵} & \text{扩充基}
\end{tikzcd}
$$

定义

设 V 为 $\mathbb{F}$-线性空间, W 为 V 的非空子集, 若

1. 任取 $\alpha, \beta \in W$, 都有 $\alpha + \beta \in W$;
2. 任取 $\alpha \in W$ 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$, 都有 $\lambda\alpha \in W$.

则称 W 为 V 的子空间.

定理 (线性相关等价刻画)

给定向量空间 v 上的一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. 则以下几条相互等价:

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关. 即, 存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得 $\Sigma_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i = \theta$.
2. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 以及 $\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ 使得 $\alpha_i = \Sigma_{j \neq i} \lambda_i \alpha_i$.
3. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $\alpha_i \in \langle \mu_1, \cdots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_m \rangle$.
4. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \rangle = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m \rangle$.

注: 这时候没有与 "$AX = 0$ 有非零解" 的等价形式.

定理

若 $S_1 \subseteq S \subseteq V$, 则

1. S_1 线性相关 $\Rightarrow S$ 线性相关;
2. S 线性无关 $\Rightarrow S_1$ 线性无关;

极大无关组

定义 (极大线性无关组)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为向量空间 v 上的一组向量. 若

- 子向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, 且
- 任加另一个向量 $\alpha_{i_{r+1}}$ 后, 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{r+1}}$ 线性相关,

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大无关组.

定理

若 $S_1 \subseteq S \subseteq V$, 则以下几条等价:

1. S_1 为 S 的极大无关组;
2. $\begin{cases} S_1 \text{ 线性无关}, \\ S \text{ 可由 } S_1 \text{ 线性表示} \end{cases}$
3. $\begin{cases} S_1 \text{ 线性无关}, \\ S \text{ 与 } S_1 \text{ 等价} \end{cases}$
4. $\begin{cases} S_1 \text{ 线性无关}, \\ \langle S \rangle = \langle S_1 \rangle \end{cases}$

向量组的等价与秩

定义 (向量组等价)

两个向量组称为等价, 若它们可以相互线性表示.

定理

两个等价线性无关的向量组个数相同.

定义 (秩)

一个向量组的秩定义为其某个极大无关组中向量的个数.

定理

设 $S, T \subseteq V$. 则

1. S 线性无关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(S) = \#S$;
2. S 线性相关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(S) < \#S$;
3. T 可由 S 线性表示 $\Rightarrow \operatorname{rank}(T) \leq \operatorname{rank}(S)$;
4. $S \sim T \Leftrightarrow \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(S)$;
5. T 可由 S 线性表示且 T 的线性无关 $\Rightarrow \#T \leq \#S$.

定义

1. 设 V 为线性空间. 若 $S \subseteq V$ 线性无关, 且 $V = \langle S \rangle$, 则称 S 为 V 的一组基.
2. 设 S 为一组基. 若 S 为有限集, 则称 V 为有限维空间, 否则称之为无限维线性空间. 称 S 的个数为 V 的维数, 记作 $\dim_{\mathbb{F}} V$.
3. 若 $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 为 V 的一组基, 则对任意 $\alpha \in V$, 存在唯一的 n 维数组向量 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^n$ 使得 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$. 称向量 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 α 在 S 下的坐标.

定理

1. n 维空间中的任意 $n+1$ 个向量线性相关.
2. n 维空间中的任意 n 个线性无关的向量组为一组基.
3. n 维空间中的任意线性无关的向量组可扩充为一组基.

如何从已有的子空间构造新的子空间?
子空间的交还是子空间.

定理

设 $W_i (i \in I)$ 为 V 的子空间, 则 $\cap_{i\in I} W_i$ 也为 V 的子空间. 特别地, 设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则 $W_1 \cap W_2$ 也为 V 的子空间.

并集呢? 几何解释? 包含并集的最小子空间?

定理

设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则 W_1 与 W_2 的和

$$W_1 + W_2 := \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

构成 V 的子空间, 并且是包含 $W_1 \cup W_2$ 的最小子空间.

引理

$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle+\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle.$

定理 (维数公式)

设 W_1, W_2 为 V 的子空间, 则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2).$$

证明思路: 扩充 $W_1\cap W_2$ 的一组基.
记 $r=\dim W_1$, $s=\dim W_2$ 以及 $t=\dim W_1\cap W_2$. 将 $W_1\cap W_2$ 一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 扩充为

$$\begin{cases} W_1 \text{ 的一组基}: \alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t} \\ W_2 \text{ 的一组基}: \alpha_1,\cdots,\alpha_t,\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t} \end{cases}$$

则 $W_1+W_2=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}\rangle$. 下面仅需证明这 $r+s-t$ 个向量线性无关.

推论

设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 则

1. $\dim(W_1+W_2) \leq \dim(W_1)+\dim(W_2)$;
2. $\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1)+\dim(W_2) \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$;
3. $\dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(V)$. 特别地, 若 $\dim(W_1)+\dim(W_2) > \dim(V)$, 则 $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

直和

定义 (直和)

设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 若任意 $\alpha \in W_1 + W_2$ 可唯一地写成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in W_1 \ \&\ \alpha_2 \in W_2),$$

则称 $W_1 + W_2$ 为直和, 记为 $W_1 \oplus W_2$. 若 $V = W_1 \oplus W_2$, 则称 W_1 为 W_2 的补空间.

注: 补空间不唯一 (例子). 如何构造补空间? 扩充基!

定理

设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 则以下几条等价:

1. $W_1 + W_2$ 为直和;
2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;
3. $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$;
4. 任取 W_1 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 和 W_2 的一组基 $\beta_1, \cdots, \beta_s$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 构成 $W_1 + W_2$ 的一组基.

直和例子

例

$$\mathbb{F}^{n\times n} = \{\text{对称矩阵}\} \oplus \{\text{反对称矩阵}\}.$$

例

令 $W_1 = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ 和
$W_2 = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$, 则

$$\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2.$$

例

$$\{\text{函数}\} = \{\text{奇函数}\} \oplus \{\text{偶函数}\}.$$

给定一个数组向量空间之间的映射 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. 若 $\mathscr{A}$ 满足

$$\begin{aligned} &\text{(保持加法)} \quad \mathscr{A}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathscr{A}(\vec{a}) + \mathscr{A}(\vec{b}); \\ &\text{(保持数乘)} \quad \mathscr{A}(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathscr{A}(\vec{a}) \end{aligned} \qquad (*)$$

则 $\mathscr{A}$ 称为从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的一个线性映射.

我们有如下一一对应:

$$\boxed{\text{从 } \mathbb{F}^n \text{ 到 } \mathbb{F}^m \text{ 的全体线性映射} \quad \xleftrightarrow[\mathscr{A}(\vec{x})=A\vec{x}]{1:1} \quad \mathbb{F}^{m\times n}}$$

例 (伸缩变换)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k_1 x \\ k_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

例 (旋转变换)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

例

- $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$ 恒等变换;
- $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow$ 零变换;
- $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} \leftrightarrow$ 伸缩变换;
- $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \leftrightarrow$ 旋转变换;
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$ 反射变换;
- $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow$ 投射变换;

接下来将线性映射推广到一般的线性空间上.

定义 (线性映射, 线性变换和同构)

设 V 和 W 为两个 $\mathbb{F}$-线性空间.(注意: 这里 V 和 W 不再要求是数组向量空间, 而只是一般的线性空间.)

1. 若映射 $\mathscr{A}: V \to W$ 满足
   - $\mathscr{A}(P_1 + P_2) = \mathscr{A}(P_1) + \mathscr{A}(P_2)$;
   - $\mathscr{A}(\lambda P_1) = \lambda\mathscr{A}(P_1)$.

   则称 $\mathscr{A}$ 为从 V 到 W 的线性映射.
2. 若 $V = W$, 则称线性映射 $\mathscr{A}$ 为 V 上的一个线性变换.
3. 若线性映射 $\mathscr{A}$ 为双射, 则称 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 到 W 的一个同构映射. 若两个线性空间之间存在同构映射, 则称它们互相同构.